

Statistik 2

Dr. rer. nat. Matthias Walz

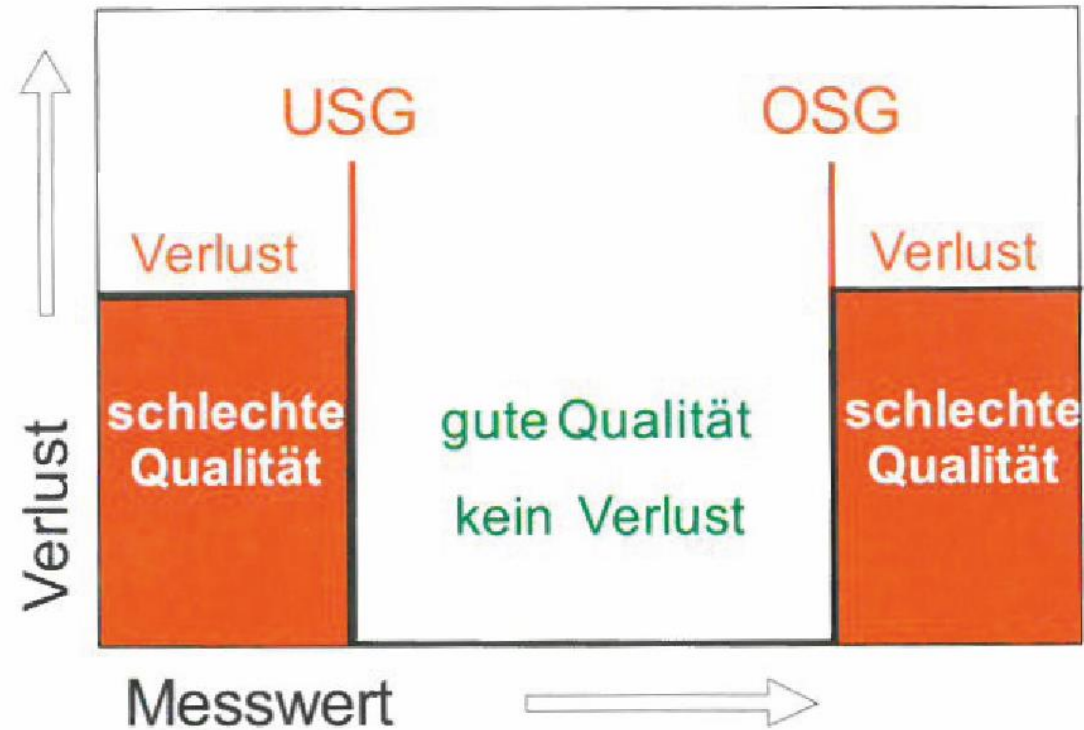


Abbildung 1.6-1: Gut-Schlecht-Denken

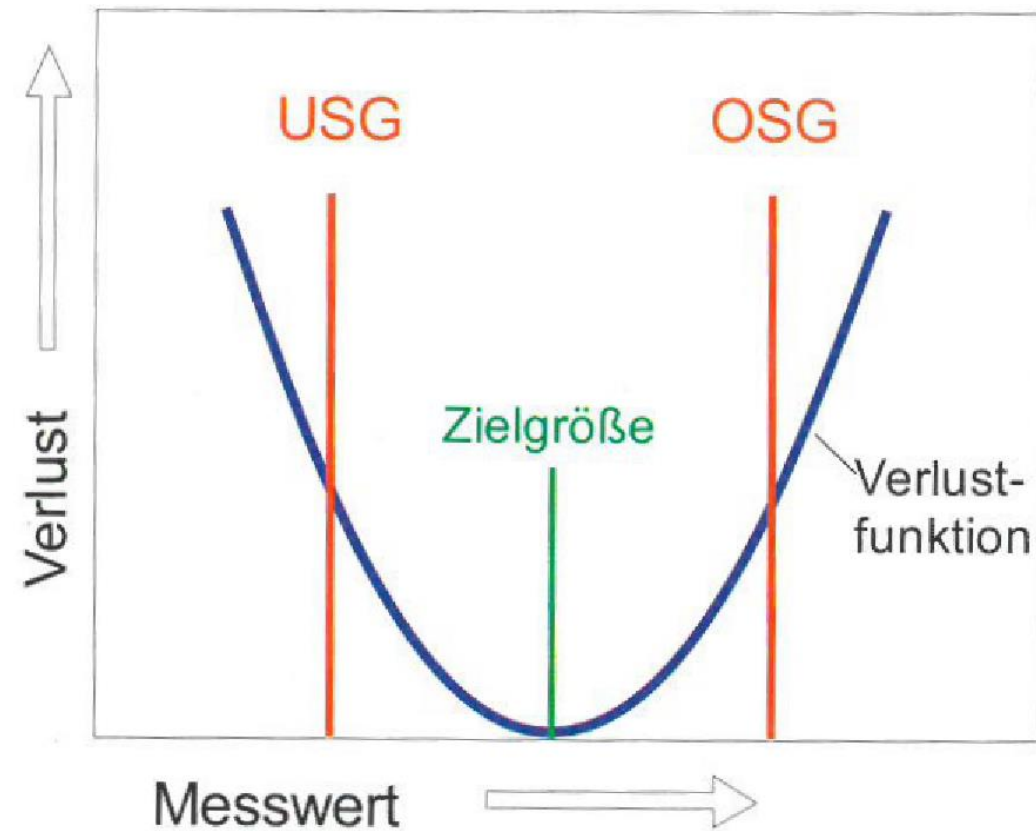


Abbildung 1.6-2: Verlustfunktion nach Taguchi

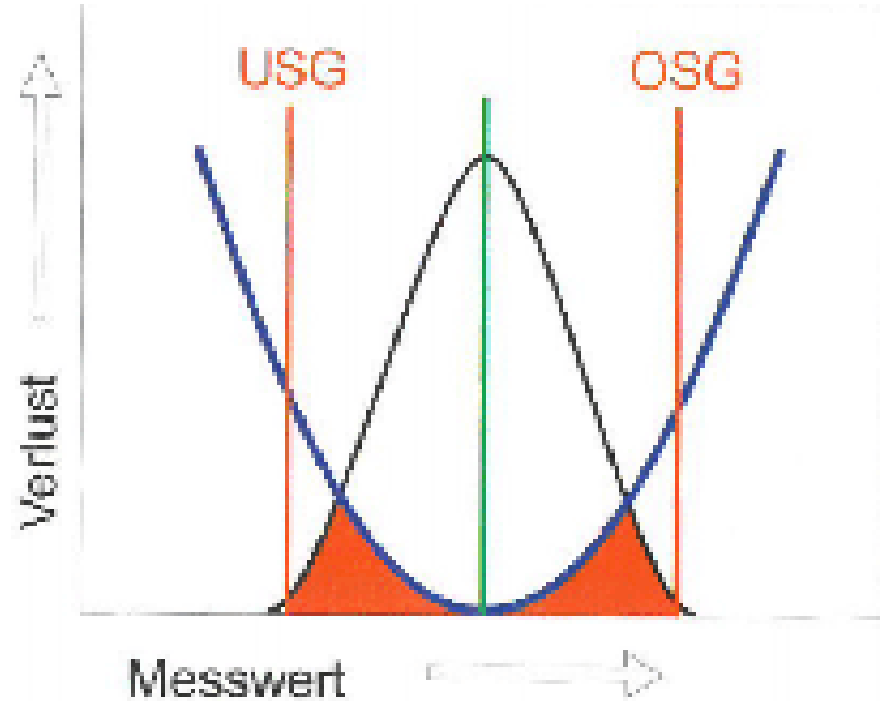


Abbildung 1.6-3: Verlust in Abhängigkeit von Prozesslage und -str

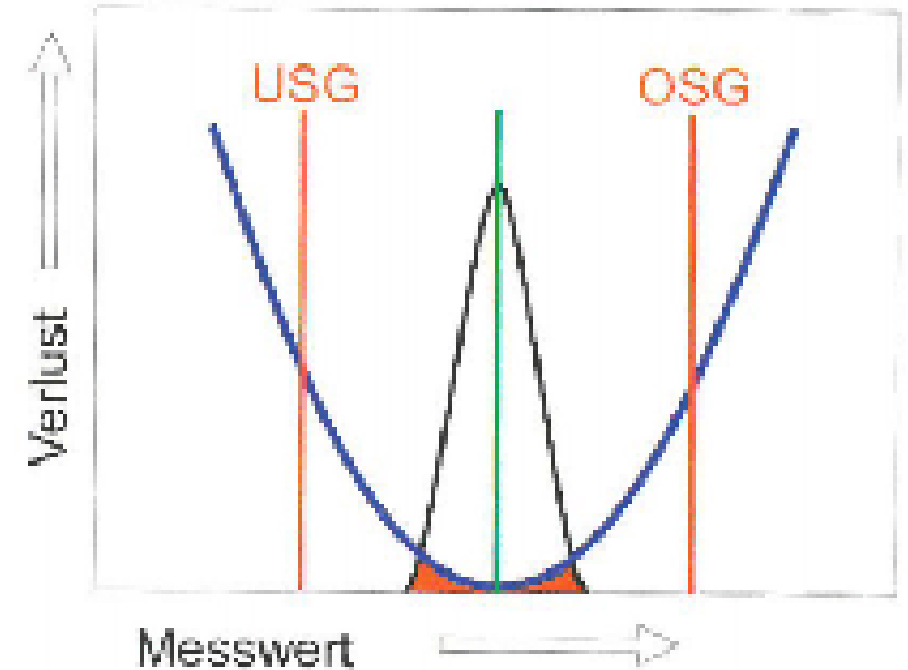
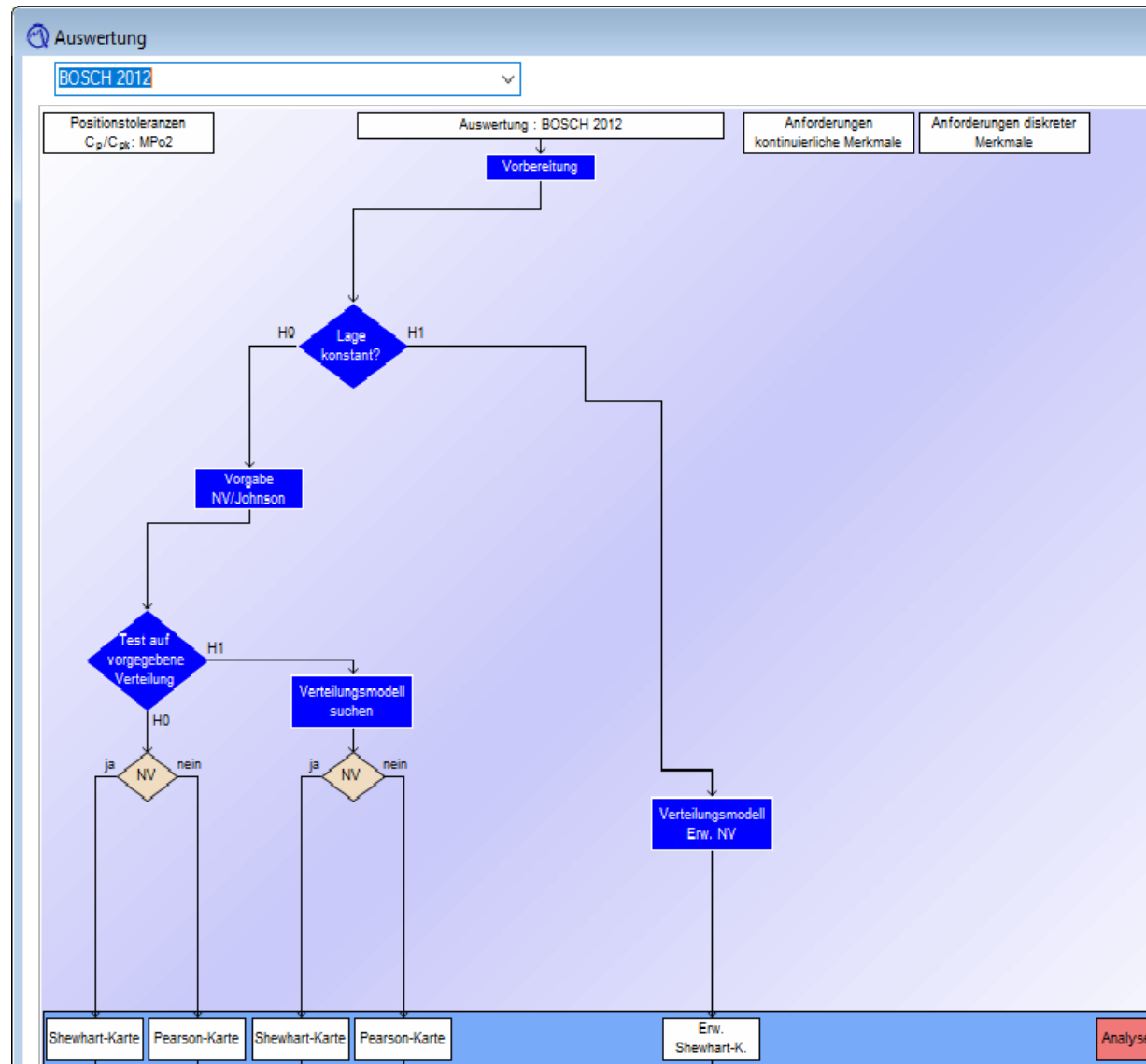


Abbildung 1.6-4: Kleinere Streuung minimiert den Verlust

Auswertestrategie nach Bosch 2012



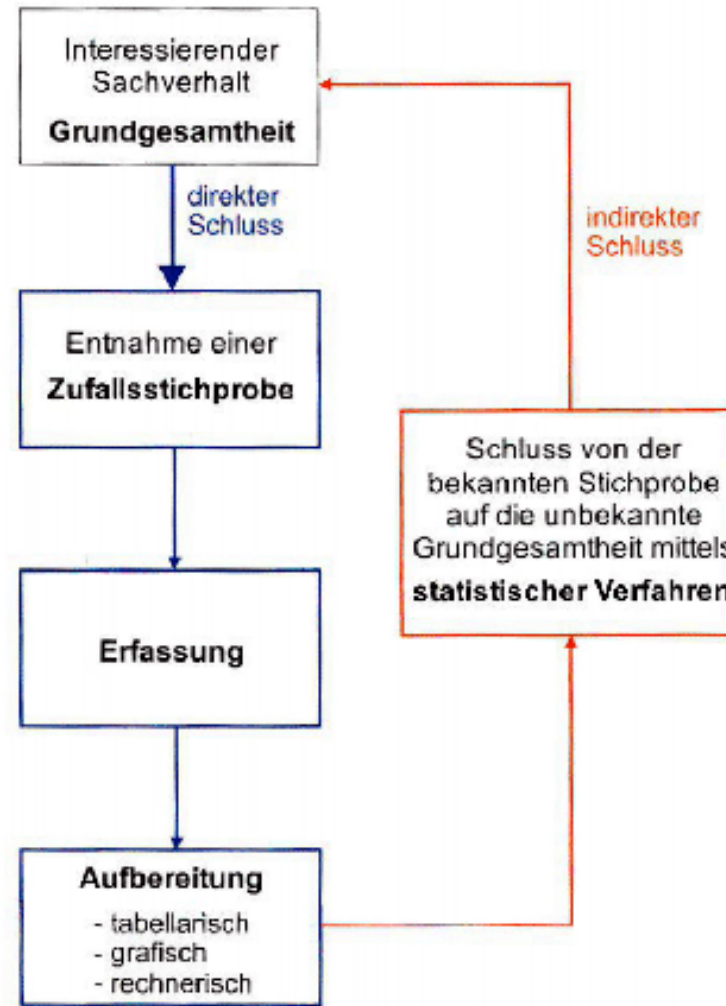


Abbildung 2.2-1: Grundmodell der technischen Statistik

arithmetischer Mittelwert :
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Median :
$$\hat{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n+2}{2})}) & n \text{ gerade} \end{cases} \quad (2)$$

Geometrischer Mittelwert:
$$\tilde{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (3)$$

$$\bar{x} = \frac{\text{Summe der Stichprobenwerte}}{\text{Anzahl der Stichprobenwerte}} \quad (4)$$

Mit $n = \text{Umfang der Stichprobe} \quad (5)$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$x_i = \text{Merkmalswert} \quad (7)$$

Median (Zentralwert)

Der Medianwert $\tilde{x}$ ist derjenige Wert der Stichprobe, der die der Größe nach sortierten Messwerte in zwei gleiche Teile zerlegt, so dass oberhalb wie unterhalb dieses Wertes gleich viele Beobachtungswerte liegen.

Bei einer geradzahligen Anzahl von Beobachtungsdaten wird der Medianwert berechnet aus dem arithmetischen Mittelwert der beiden in der Mitte liegenden Werte.

$$\tilde{x} = x_{(m)} \qquad m = \frac{n+1}{2} \qquad (n \rightarrow \text{ungerade})$$

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} [x_{(m)} + x_{(m+1)}] \qquad m = \frac{n}{2} \qquad (n \rightarrow \text{gerade})$$

Die Varianz ist die Maßzahl, die die Streuung der Messwerte beschreibt. Sie wird mit s^2 bezeichnet und ist durch die Formel

$$\text{Varianz : } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (4)$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \quad (5)$$

definiert.

Die positive Quadratwurzel der Varianz wird als **Standardabweichung** bezeichnet:

$$\text{Standardabweichung : } s = +\sqrt{s^2} \quad (6)$$

Schiefte, Asymmetrie :

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (16)$$

$$m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 \quad (17)$$

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \quad (18)$$

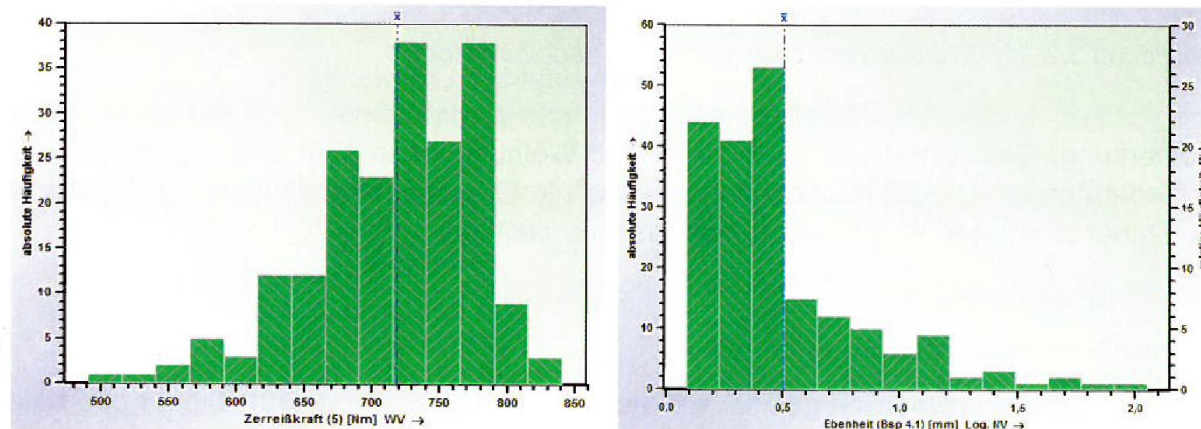
Schiefe, Asymmetrie

Eine eingipflige Verteilung kann rechtsschief oder linksschief bzw. linkssteil oder rechtssteil sein. Die Schiefe g_1 ist ein Maß, das Auskunft über die Richtung und die Größenordnung der Asymmetrie einer Verteilung gibt.

$$g_1 = m_3 / m_2^{3/2}$$
$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$
$$m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$$

mit $i = 1, 2, 3, \dots$

Ist $g_1 = 0$, so heißt dies, dass die Verteilungsform symmetrisch ist. Je positiver der Wert wird, desto rechtsschief ist die Verteilung. Sie ist um so linksschief, je negativer der Wert g_1 wird.



a) linksschief/rechtssteil $g_1 = -0,8081020$

b) rechtsschief/linkssteil $g_1 = 1,6248261$

Abbildung 3.2-1: Schiefe in Abhängigkeit der Verteilungsform

Wölbung : $b_2 = m_4 / m_2^2$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (19)$$

Exzess : $g_2 = b_2 - 3$

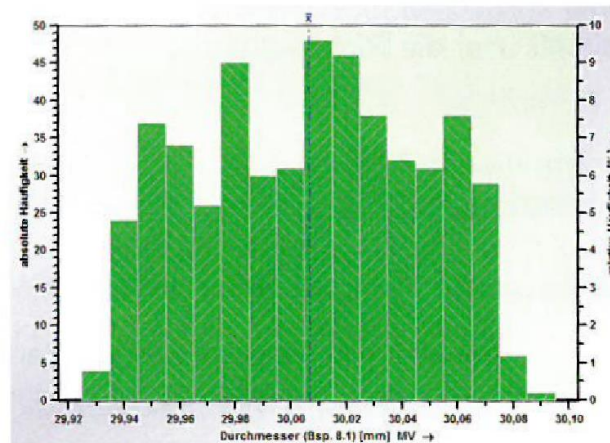
$$m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 \quad (20)$$

Exzess, Wölbung (Kurtosis)

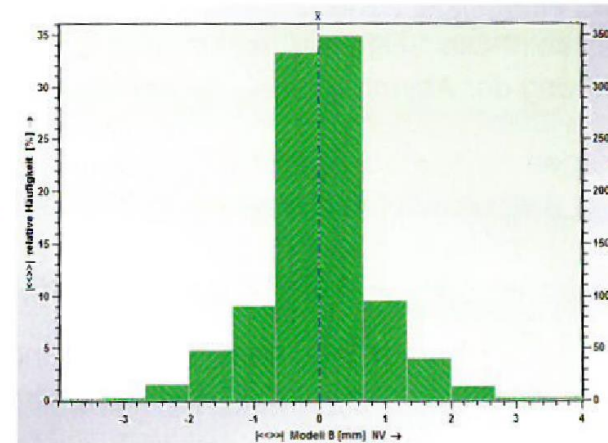
Wölbung: $b_2 = m_4 / m_2^2$ $m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ mit $i = 1, 2, 3, \dots$

Exzess: $g_2 = b_2 - 3$ $m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4$

Je größer der Wert für die Wölbung ist, desto steilgipfliger ist die Verteilung und umgekehrt.



a) flachgipflig $b_2 = 1,9274760$



b) steilgipflig $b_2 = 5,84657$

Abbildung 3.2-2: Wölbung in Abhängigkeit der Verteilungsform

Axiome der Wahrscheinlichkeit

Definition:

Eine auf einem System von Ereignissen aus Ω definierte reelle Funktion P (P = Probability) heißt eine **Wahrscheinlichkeit**, wenn sie folgende **Axiome** erfüllt:

$$(K1) \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{für jedes Ereignis } A \quad (\text{Nichtnegativität}) \quad (25)$$

$$(K2) \quad P(\Omega) = 1 \quad (\text{Normierung}) \quad (26)$$

$$(K3) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (\sigma - \text{Additivität}) \quad (27)$$

für paarweise unvereinbare Ereignisse mit $A_i \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace:

Laplace-Wahrscheinlichkeit

- (L1) Bei einem Zufallsexperiment gibt es nur endlich viele verschiedene Versuchsergebnisse, d.h. die Ergebnismenge Ω ist endlich.
- (L2) Keines der Versuchsergebnisse darf bevorzugt auftreten, d.h. alle Elementarereignisse sind gleich wahrscheinlich.

Laplace Wahrscheinlichkeit

$$\text{Ereignismenge} \quad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\} \quad (28)$$

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^m \omega_i; \quad 1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^m P(\omega_i) = m \cdot n \quad (29)$$

$$p = P(\omega_i) = \frac{1}{m} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, m \quad (30)$$

Falls ein Ergebnis A aus r Versuchsergebnissen besteht gilt:

$$P(A) = r \cdot \frac{1}{m} = \frac{r}{m} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der insgesamt möglichen Fälle}}$$

Häufigkeitsverteilung zweier idealer Würfel

Tabelle 1: Augensumme zweier idealer Würfel

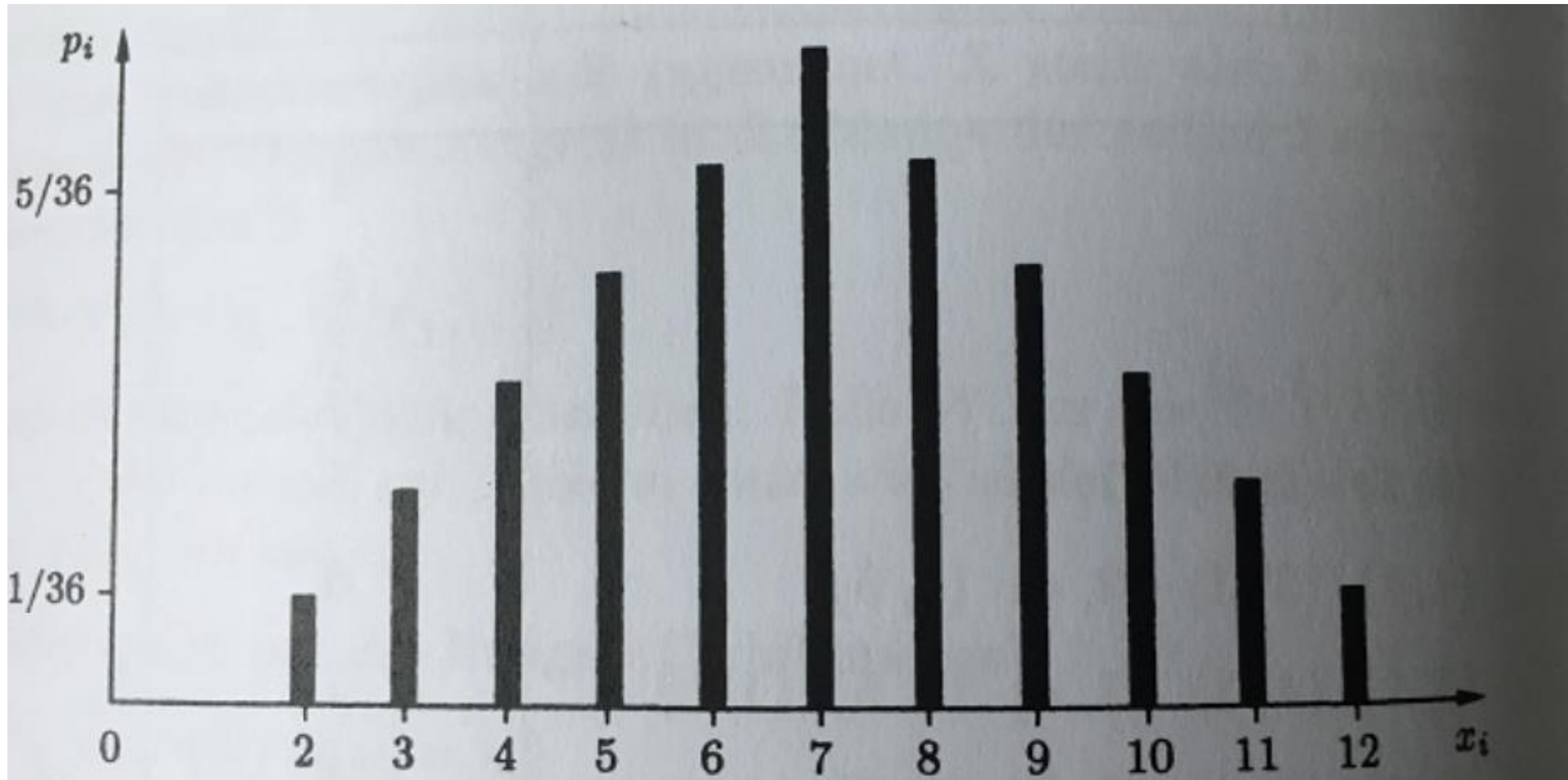
Augenpaare						Augensumme
1,1						2
2,1	1,2					3
3,1	2,2	1,3				4
4,1	3,2	2,4	1,4			5
5,1	4,2	3,3	1,4	1,5		6
6,1	5,2	4,3	3,4	2,5	1,6	7
6,2	5,3	4,4	3,5	2,6		8
6,3	5,4	4,5	3,6			9
6,4	5,5	4,6				10
6,5	5,6					11
6,6						12

Häufigkeitsverteilung zweier idealer Würfel

Tabelle 2

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Häufigkeitsverteilung zweier idealer Würfel

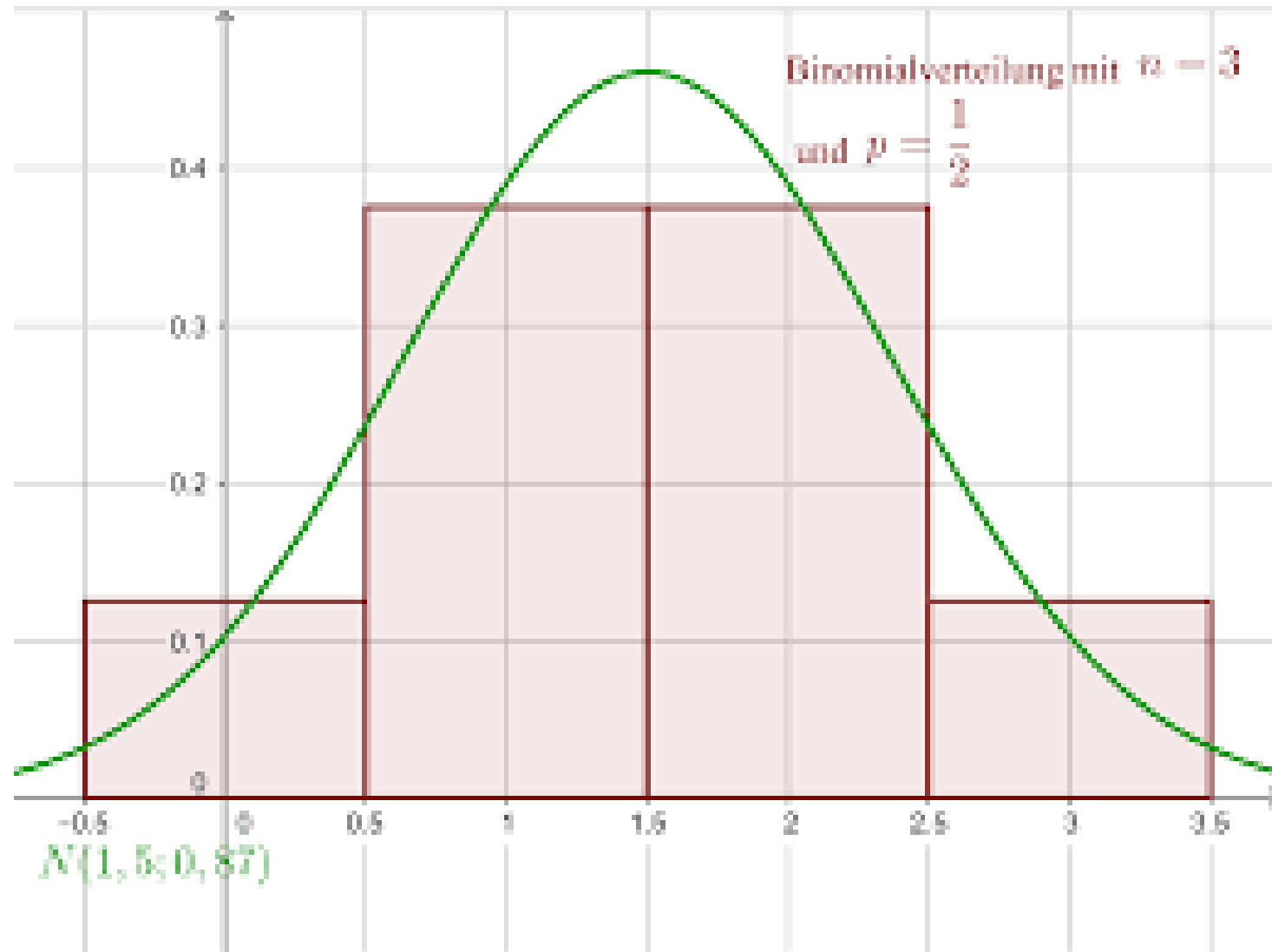


Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung Binomialverteilung

Eine Urne enthalte N Kugeln, von denen M schwarz und die restlichen $M-N$ weiß sind. Dabei gelte $1 \leq M \leq N$. Aus dieser Urne werden n Kugeln zufällig ausgewählt. p_k sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den n ausgewählten Kugeln genau k schwarze befinden. Im Gegensatz zur Hypergeometrischen Verteilung wird die gezogene Kugel zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür lautet:

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{M}{N}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

für $k = 0, 1, 2, \dots, n$ und n beliebig.



Hypergeometrische Verteilung

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung Hypergeometrische Verteilung

Eine Urne enthalte N Kugeln, von denen M schwarz sind. Daraus werden ohne zwischenzeitliches Zurücklegen n Kugeln gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den n ausgewählten Kugeln k schwarze befinden lautet:

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

für $0 \leq k \leq \min(n, m)$ und $0 \leq n - k \leq N - M$; $n \leq N$

Normal- oder Gauß-Verteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte :

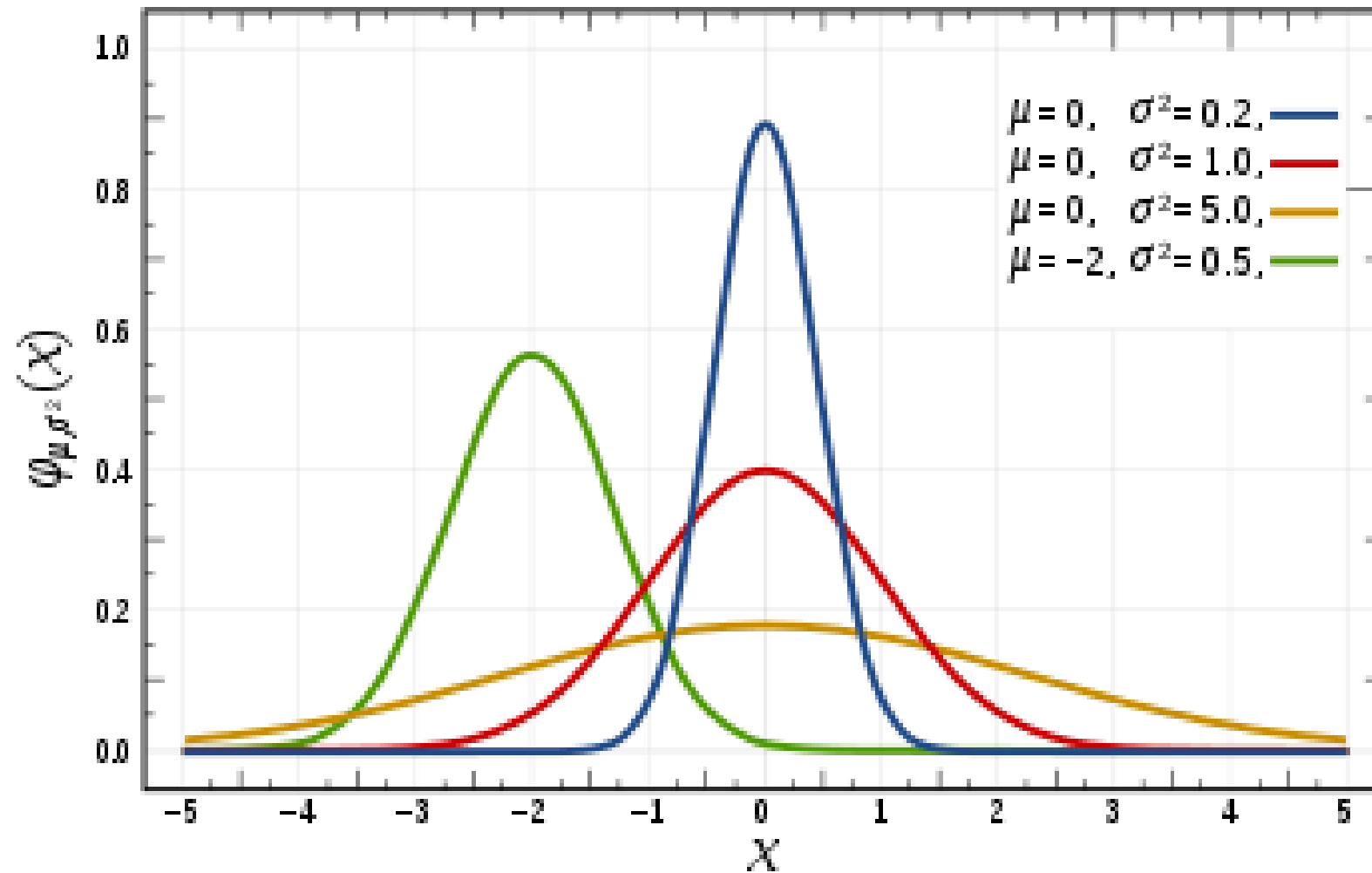
$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \quad (12)$$

Verteilungsfunktion :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (13)$$

Normalverteilung: Dichtefunktionen



Normal- oder Gauß-Verteilung

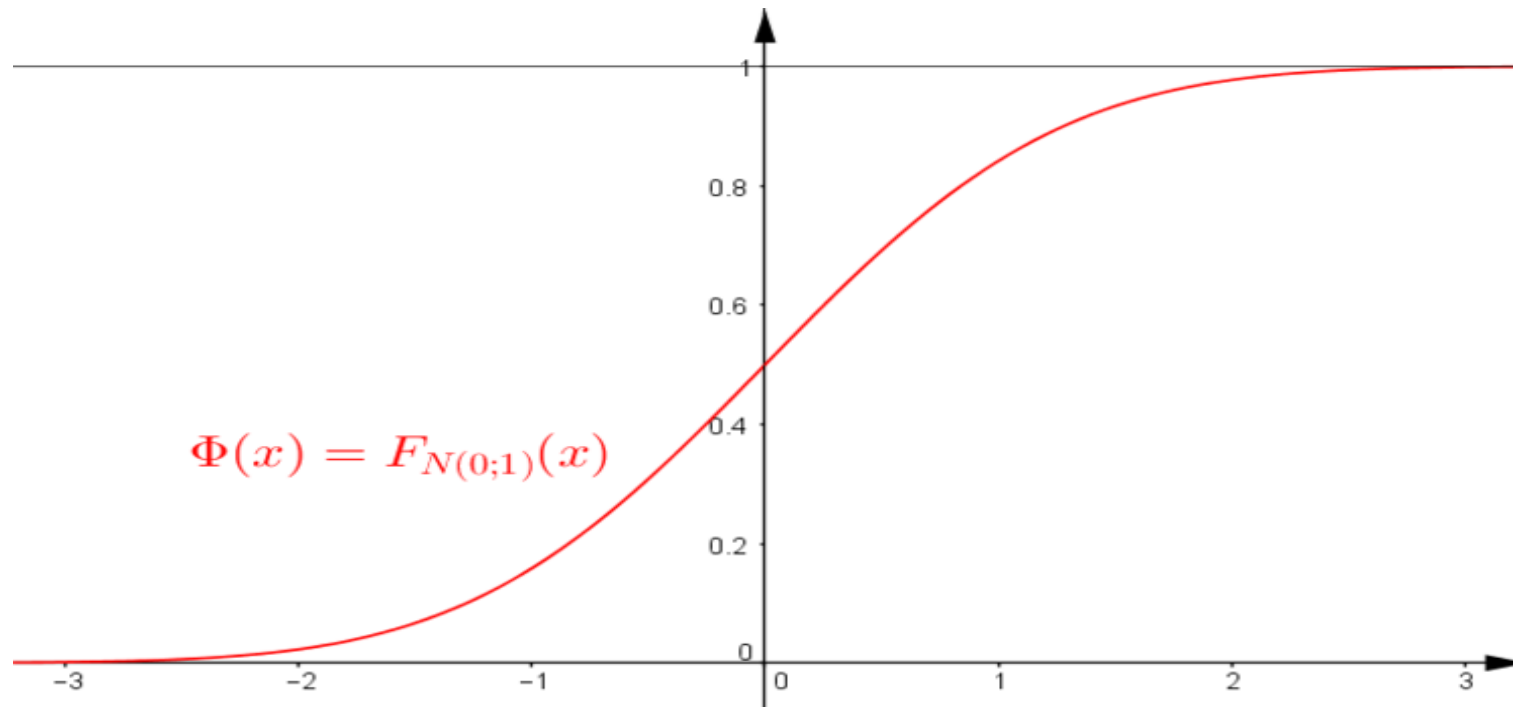
Durch die Substitution $t = \sigma z + \mu$ wird statt t die neue Integrationsvariable $z =: \frac{t-\mu}{\sigma}$ eingeführt. Auf die Verteilungsfunktion angewandt ergibt dies

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (14)$$

Standardnormalverteilung

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (15)$$

Verteilungsfunktion der Normalverteilung



Erwartungswert einer Verteilung

Erwartungswert einer Dichteverteilung $f(x)$

Falls

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x) dx < \infty$$

gilt, heißt

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx < \infty$$

der **Erwartungswert** der mit der Dichte f verteilten Zufallsvariablen X .

Varianz und Standardabweichung

Die stetige Zufallsvariable X besitze die Dichte $f(x)$ und den Erwartungswert $\mu = E(X)$. Dann heißt im Falle der Existenz

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx < \infty$$

die **Varianz** und die Quadratwurzel $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$ die **Standardabweichung** der stetigen Zufallsvariablen X .

Ist x eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Streuung σ , so gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung von x einen Wert im Bereich $a \leq x \leq b$ liefert,

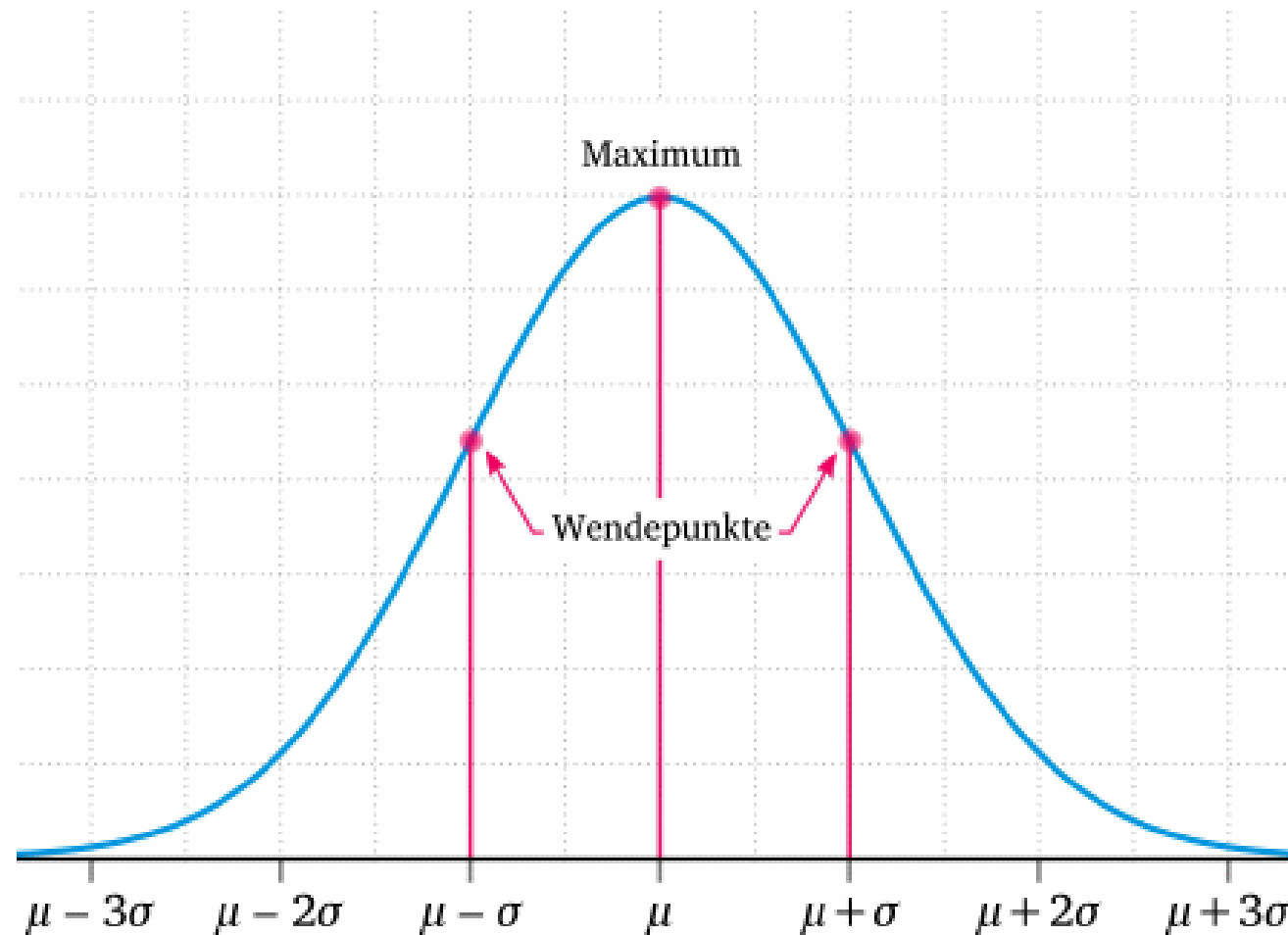
$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x)dx = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \quad (8.5)$$

Da $\Phi(-\infty) = 0$ und $\Phi(\infty) = 1$ ist, folgen als Spezialfälle die Formeln

$$P(x \leq b) = \int_{-\infty}^b p(x)dx = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) \quad (8.6)$$

$$P(a \leq x) = \int_a^{\infty} p(x)dx = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \quad (8.7)$$

Normalverteilung: Dichtefunktion

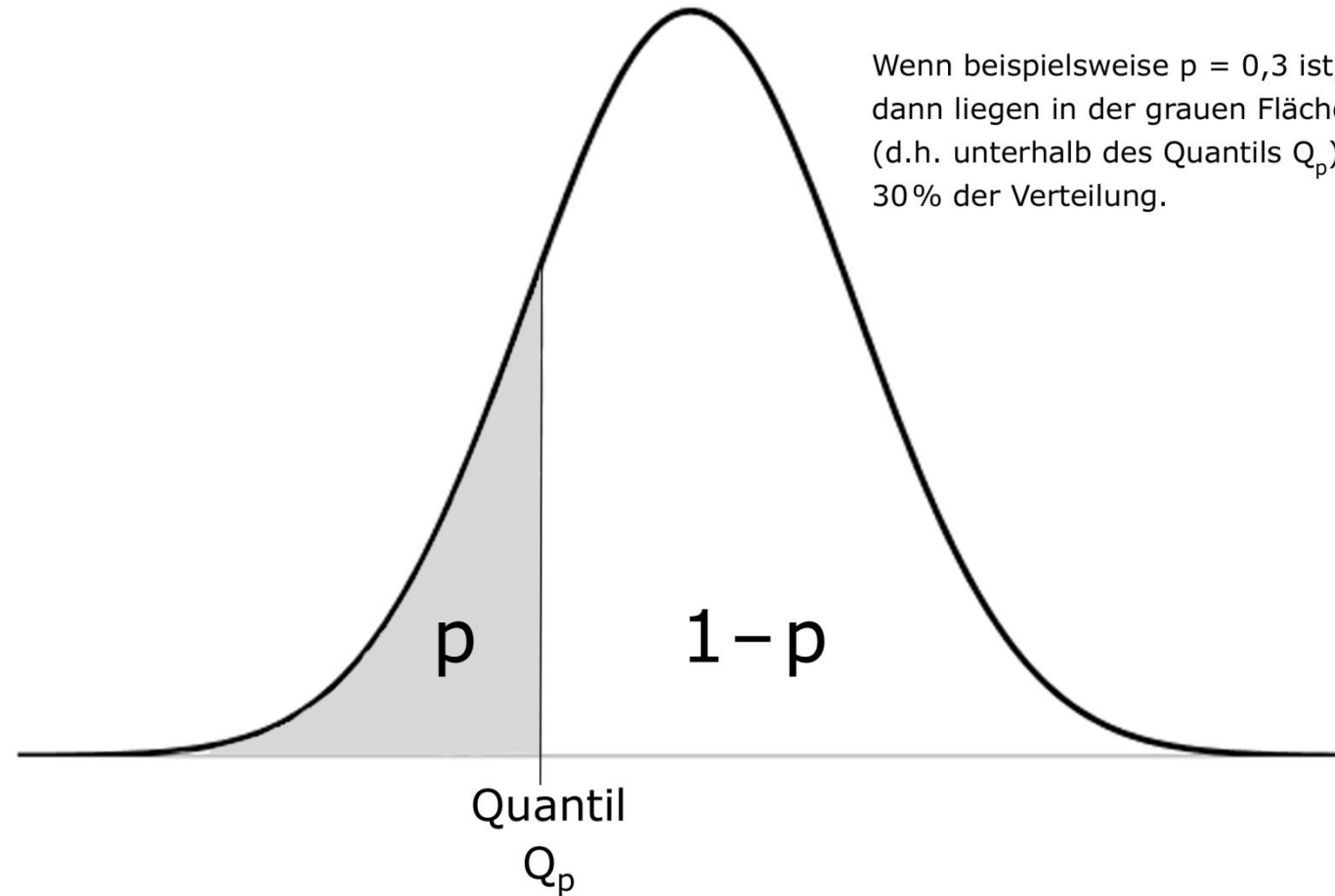


Quantil

Für $0 < q < 1$ heißt jeder Zahlenwert ξ_q mit

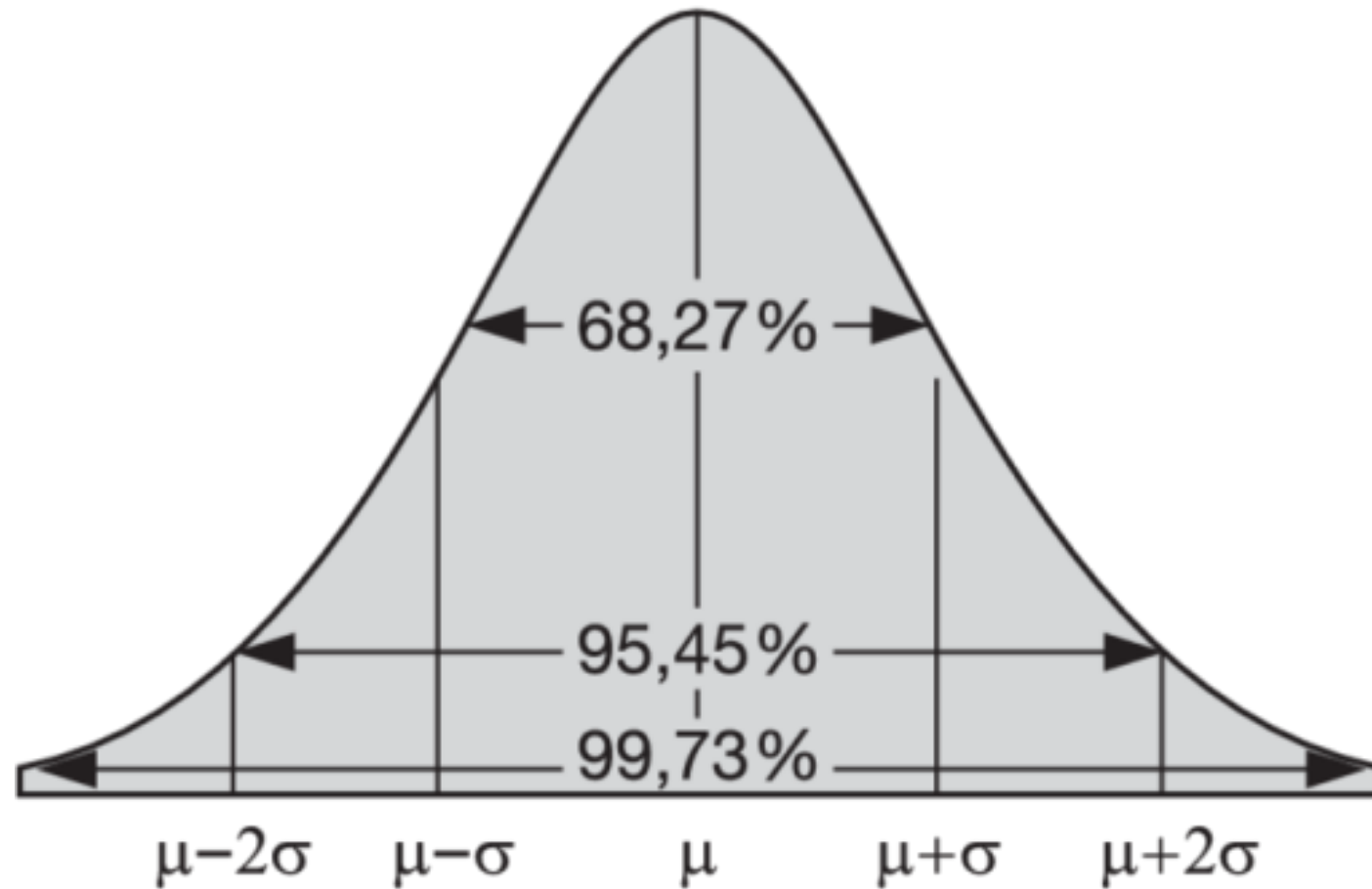
$$F(\xi_q) = P(X \leq \xi_q) = q$$

q -Quantil der stetigen Zufallsvariablen X .



Prozentuale Wahrscheinlichkeiten

Normalverteilung



Prozessfähigkeitskennzahlen

Allgemein lauten die Formeln zur Berechnung der C_p - und C_{pk} -Werte für eine beliebige Verteilungsfunktion

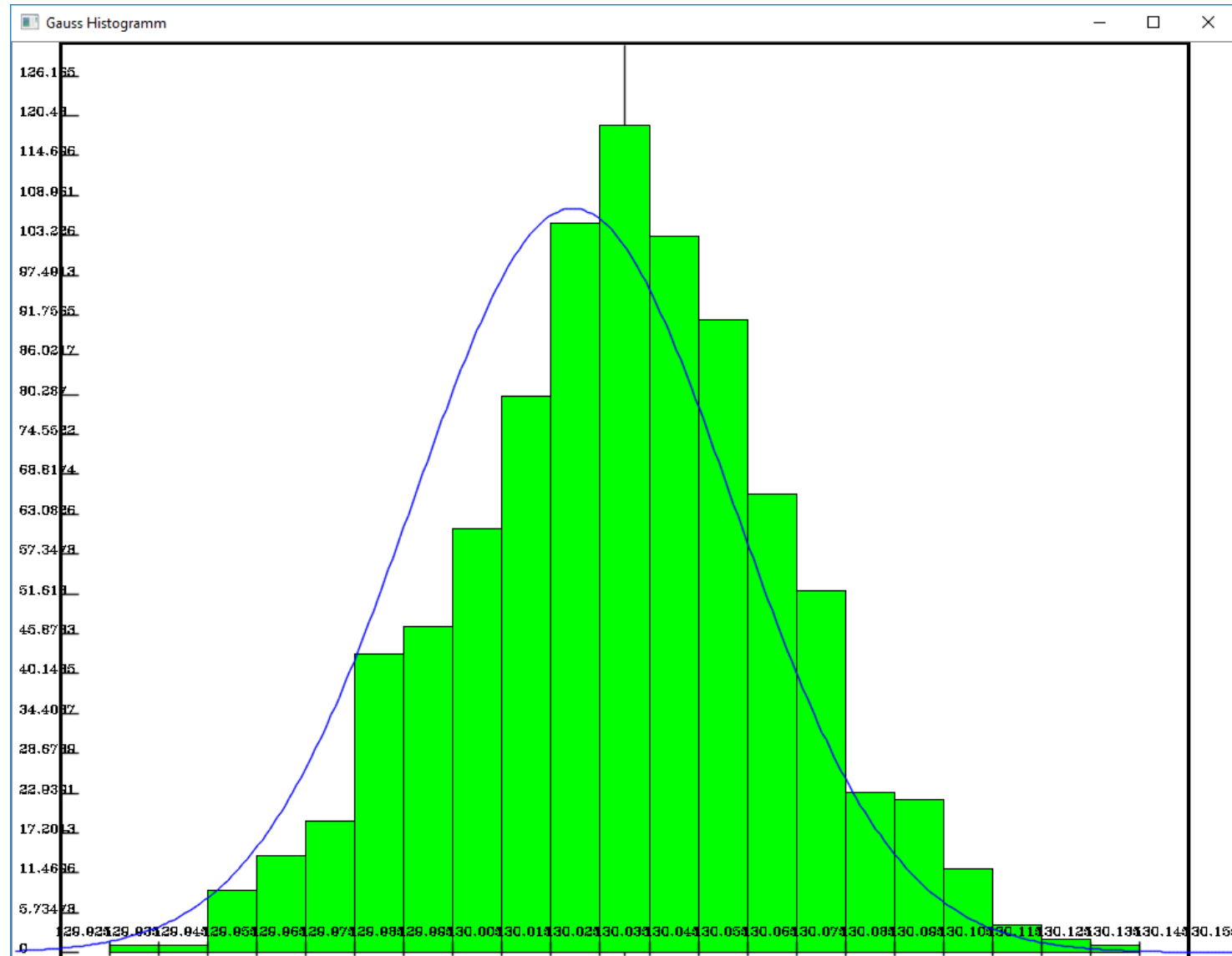
$$C_p = \frac{OSG - USG}{q_{99.865\%} - q_{0.135\%}} \quad (7)$$

$$C_{pkl} = \frac{q_{50\%} - USG}{q_{50\%} - q_{0.135\%}} \quad (8)$$

$$C_{pku} = \frac{OSG - q_{50\%}}{q_{99.865\%} - q_{50\%}} \quad (9)$$

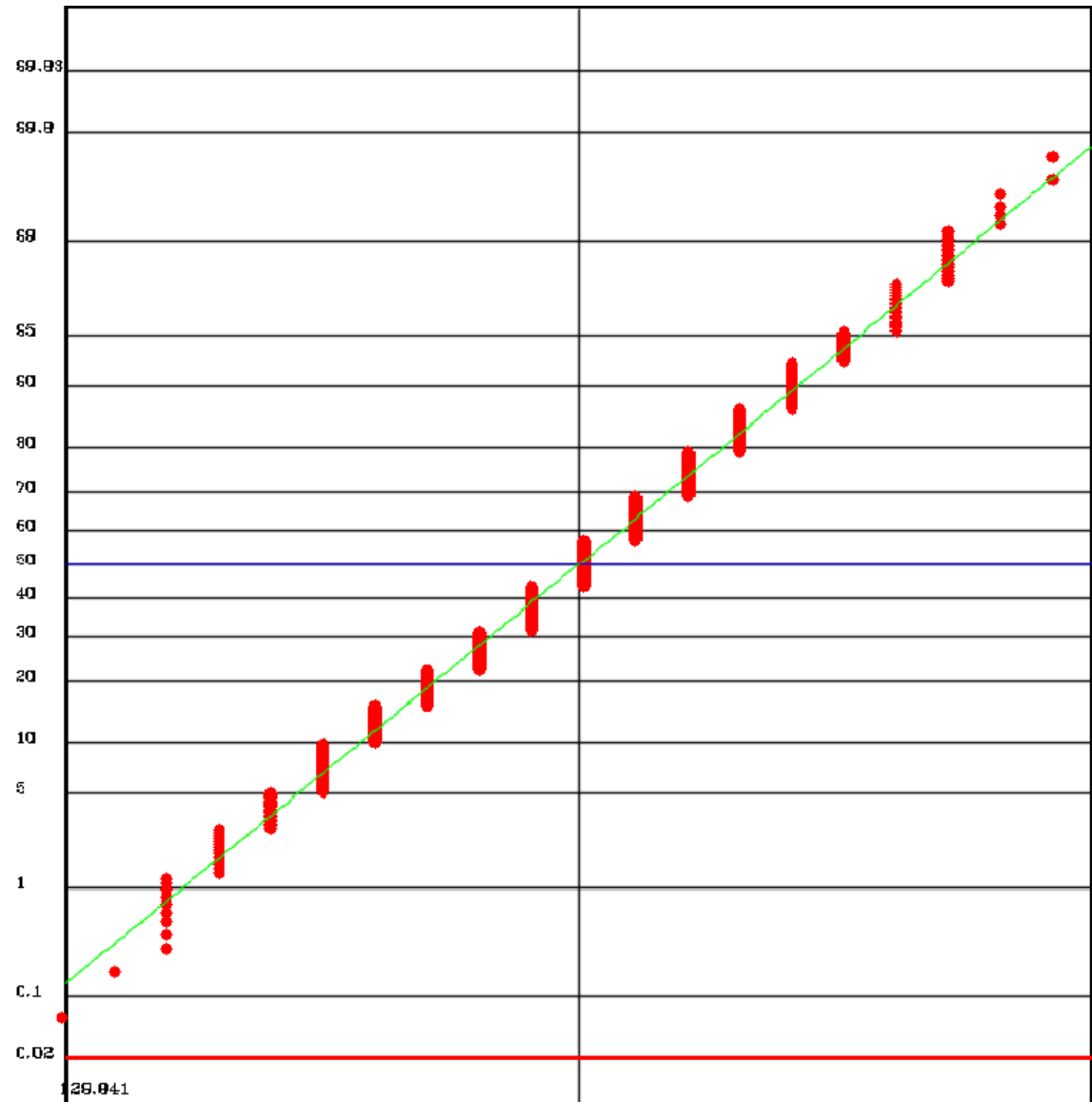
$$C_{pk} = \min(C_{pkl}; C_{pku}) \quad (10)$$

Normalverteilung



Screenshot GEWATEC QST

Wahrscheinlichkeitsnetz Normalverteilung

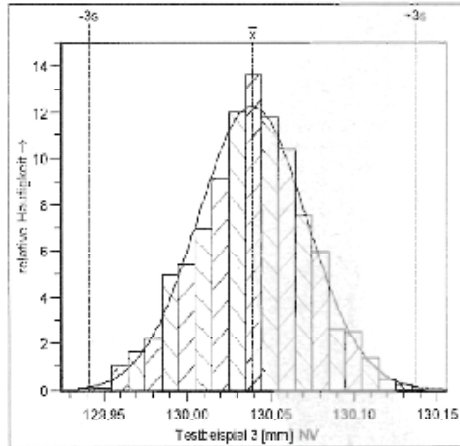


Die bekanntesten Verteilungsarten sind:

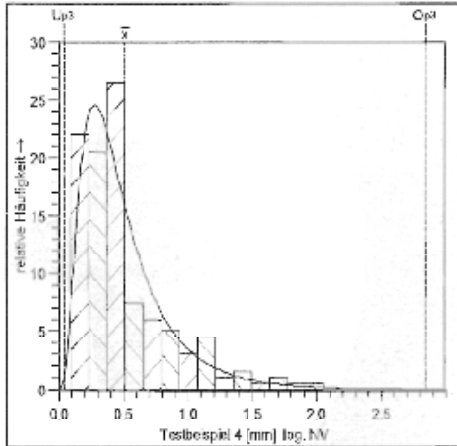
- Normalverteilung (Gauß)
- Logarithm. Normalverteilung
- Weibull-Verteilung
- Rayleigh-Verteilung
- Betragsverteilung 1. Art
- Mischverteilung

Test auf Normalverteilung

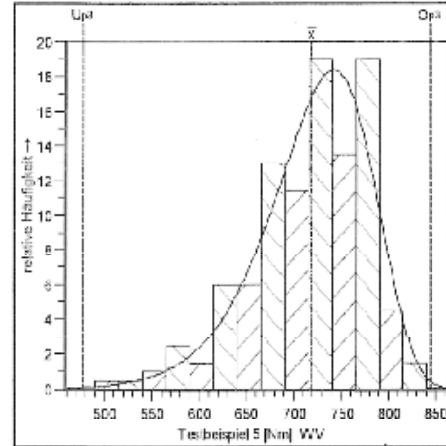
- t-Test (Student-Test): Lagetest der Mittelwerte von Stichproben
- F-Test: Streuungstest der Varianzen von Stichproben
- Chi-Quadrat-Test: Test auf Verteilungsfunktionen und Verteilungsmodelle
- Kolmogoroff-Smirnov-Test: Test auf Verteilungsfunktionen
- Shapiro-Wilk-Test: Test auf Normalverteilungsfunktion



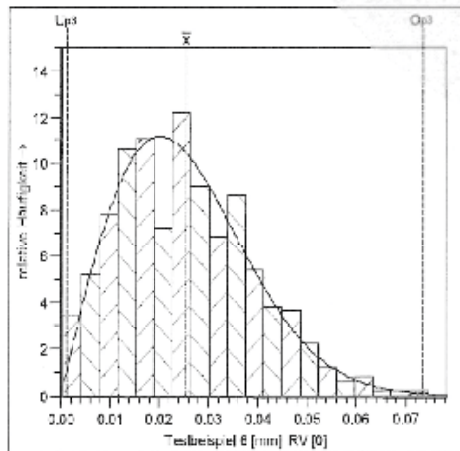
Normalverteilung



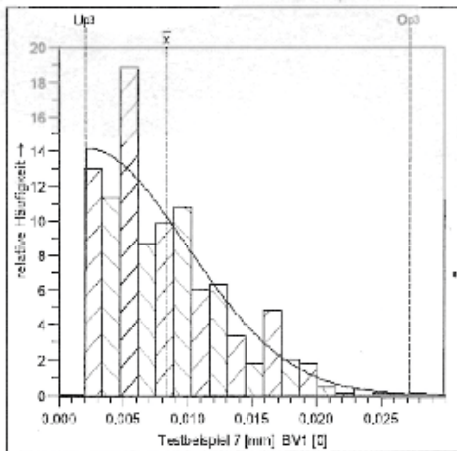
Log. Normalverteilung



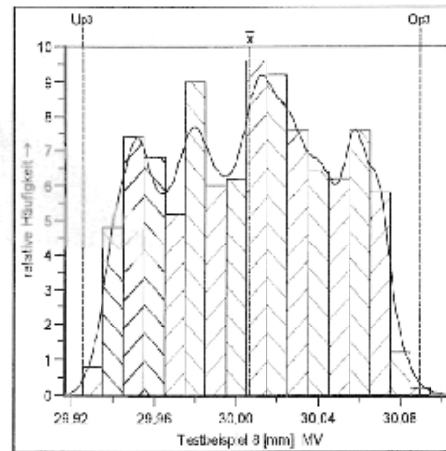
Weibull-Verteilung



Rayleigh-Verteilung

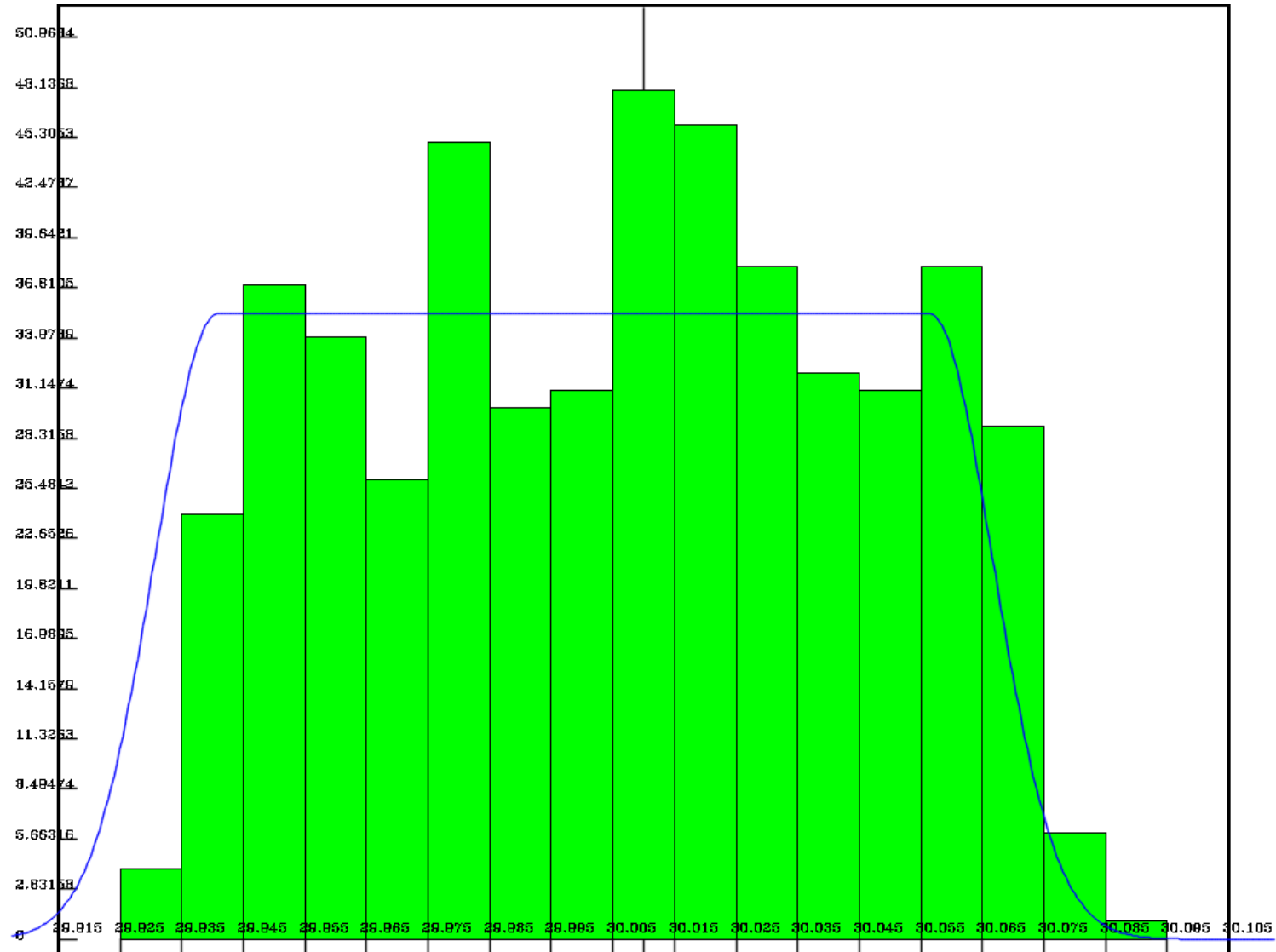


Betragsverteilung 1. Art

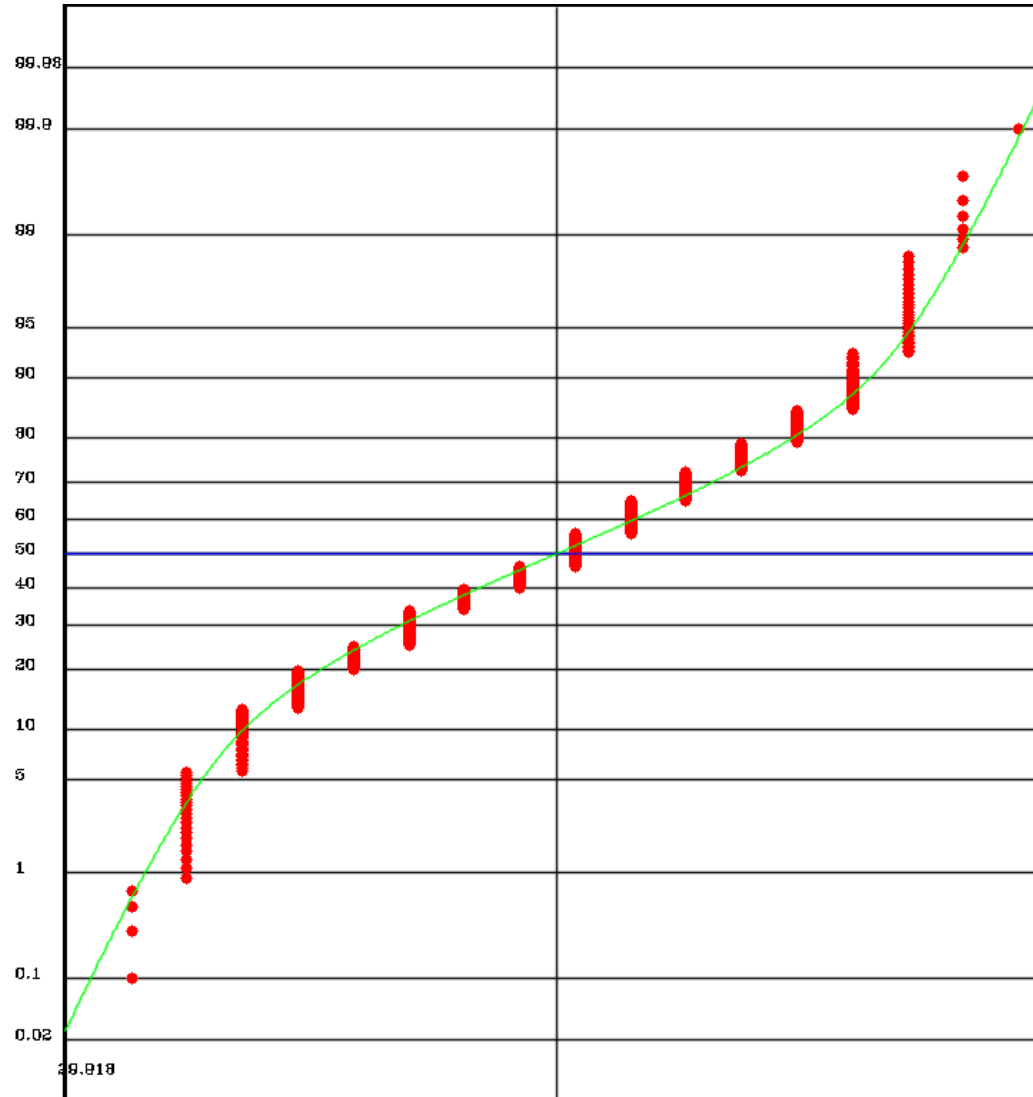


Mischverteilung

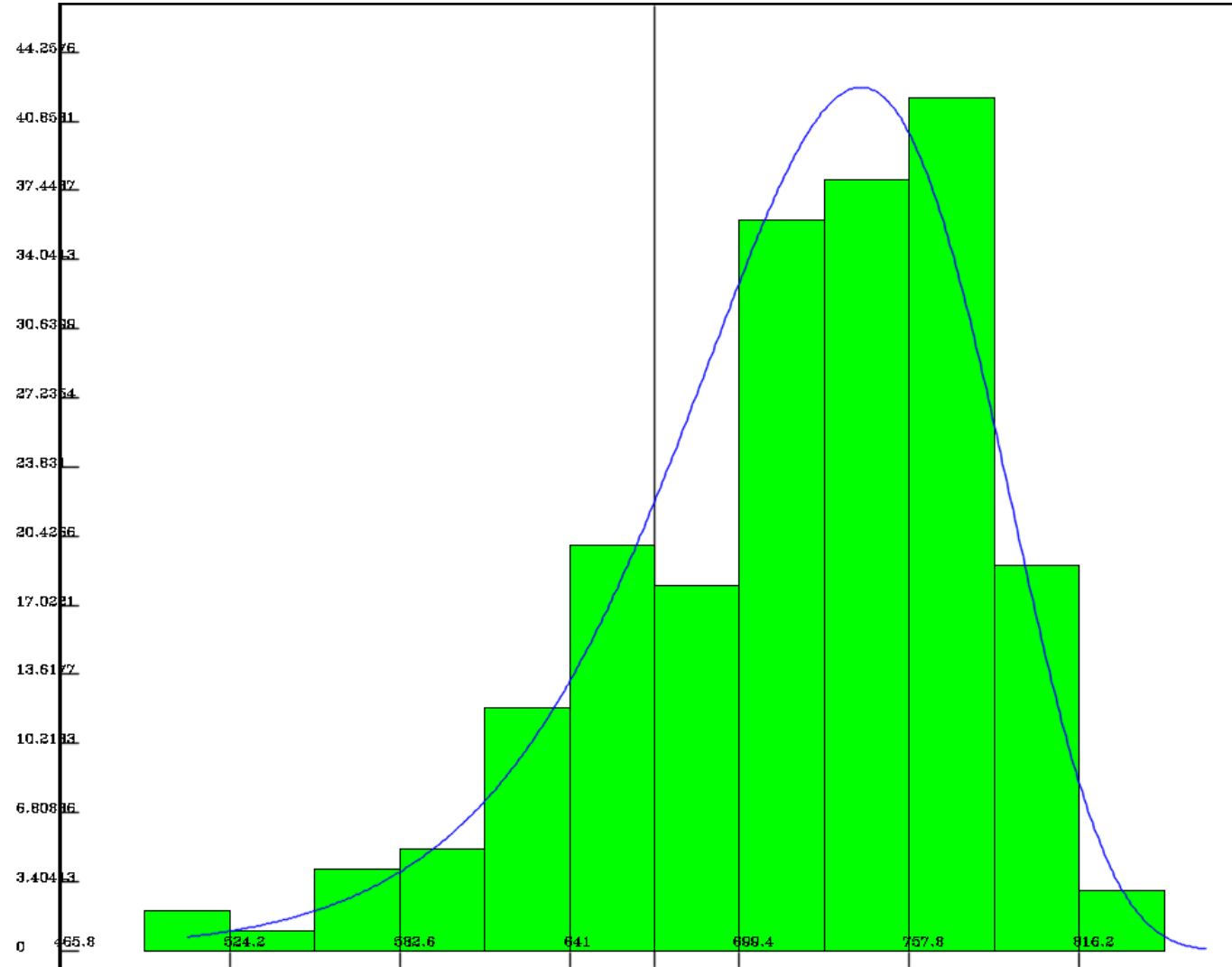
Erweiterte Normalverteilung



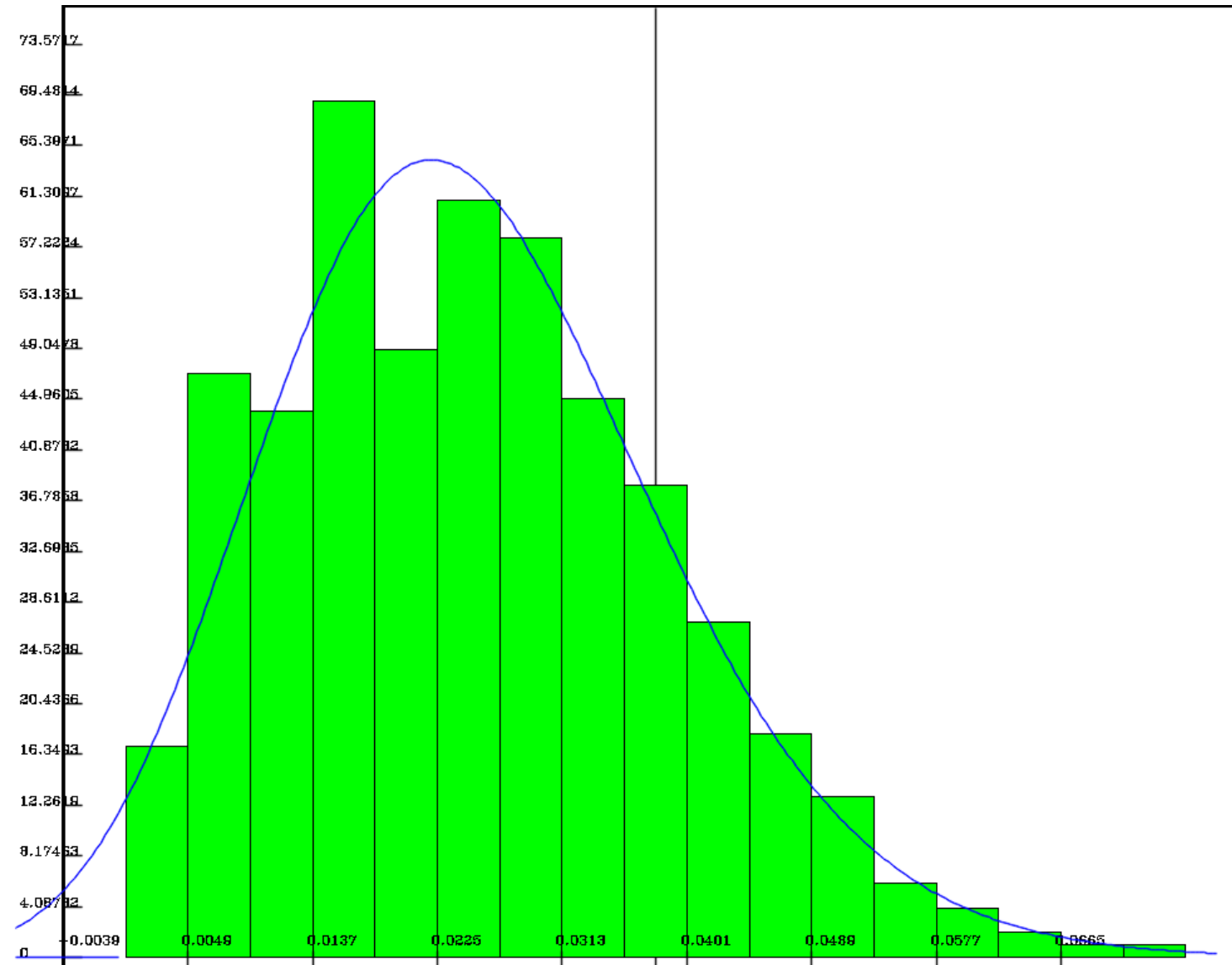
Wahrscheinlichkeitsnetz erw. Normalverteilung



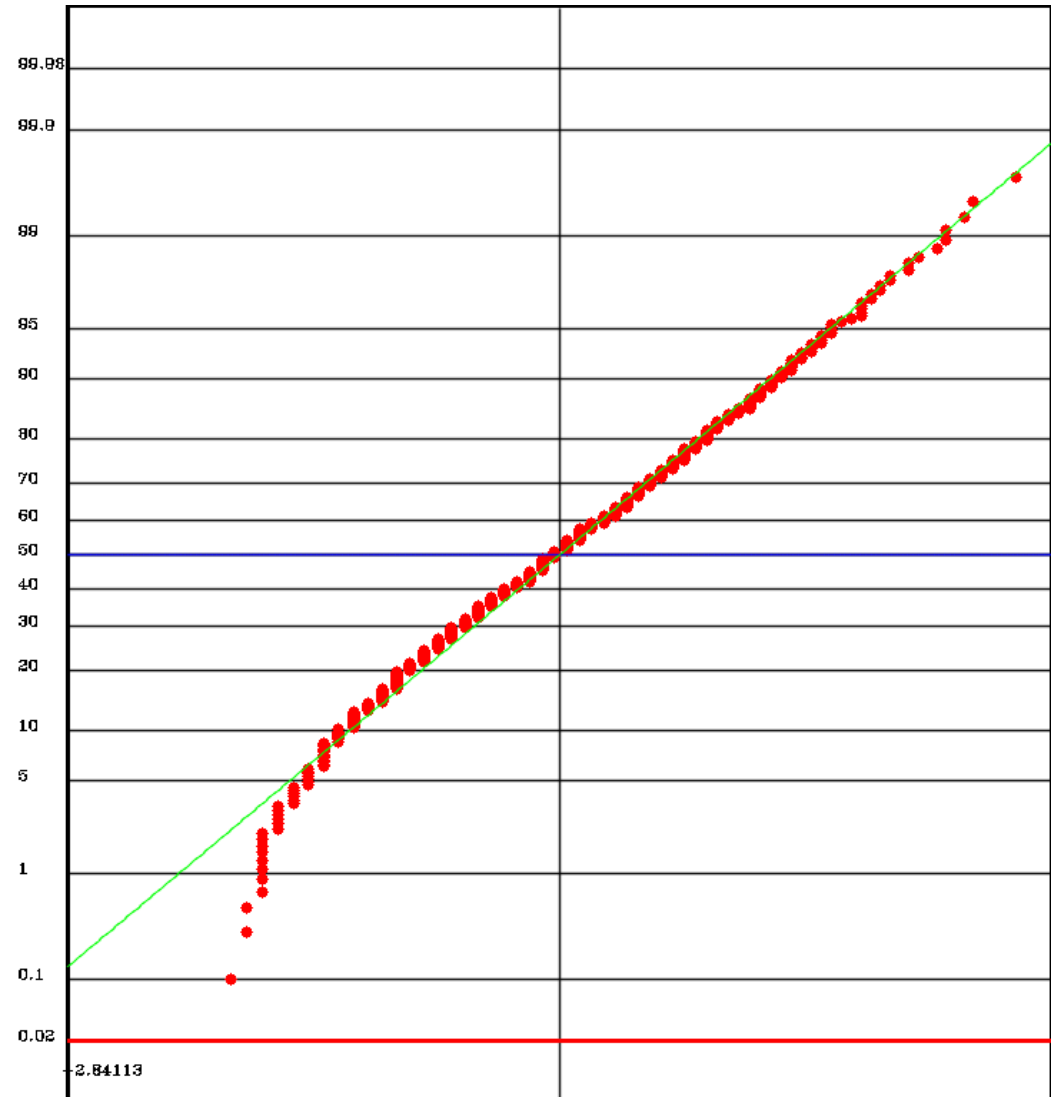
Johnson-Transformation linksschief



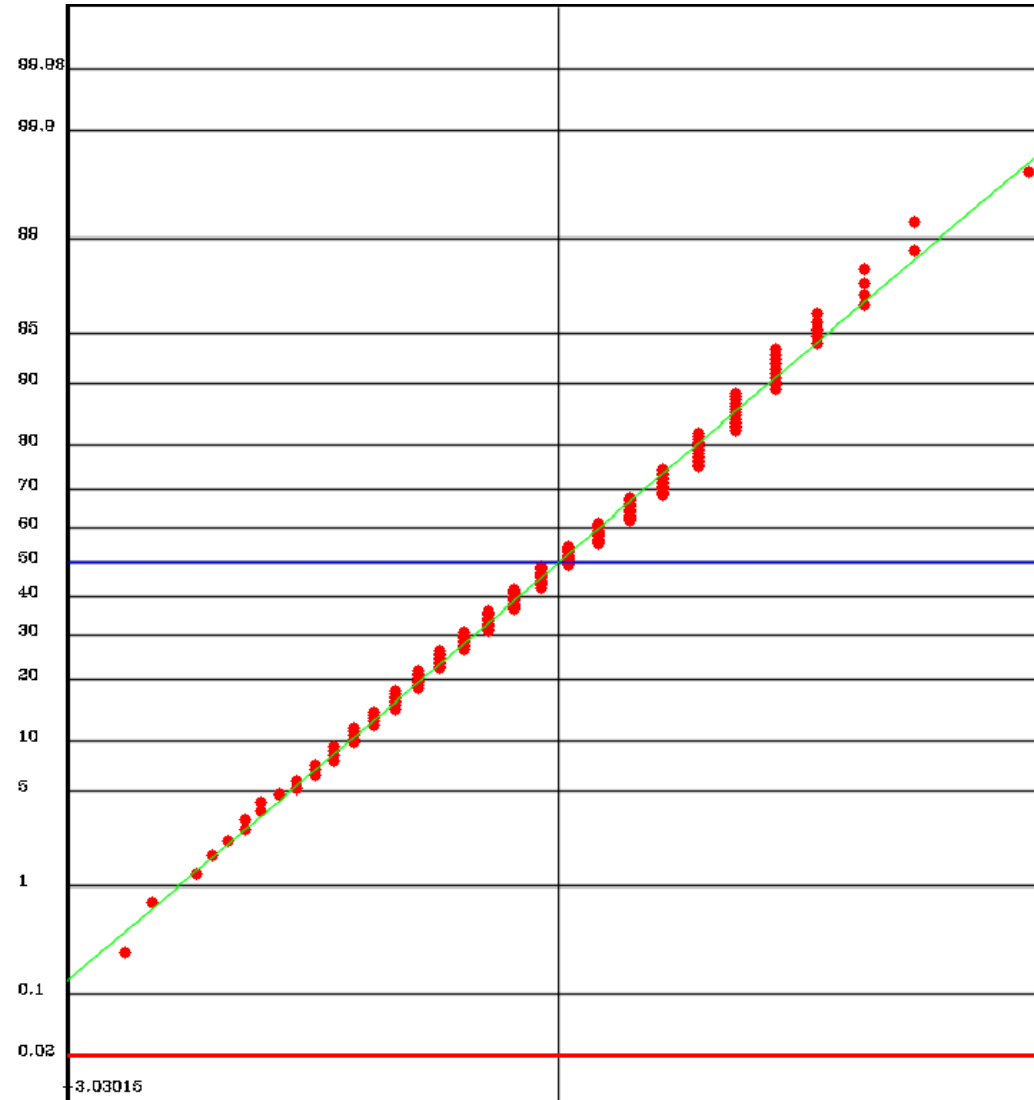
Johnson-Transformation rechtsschief



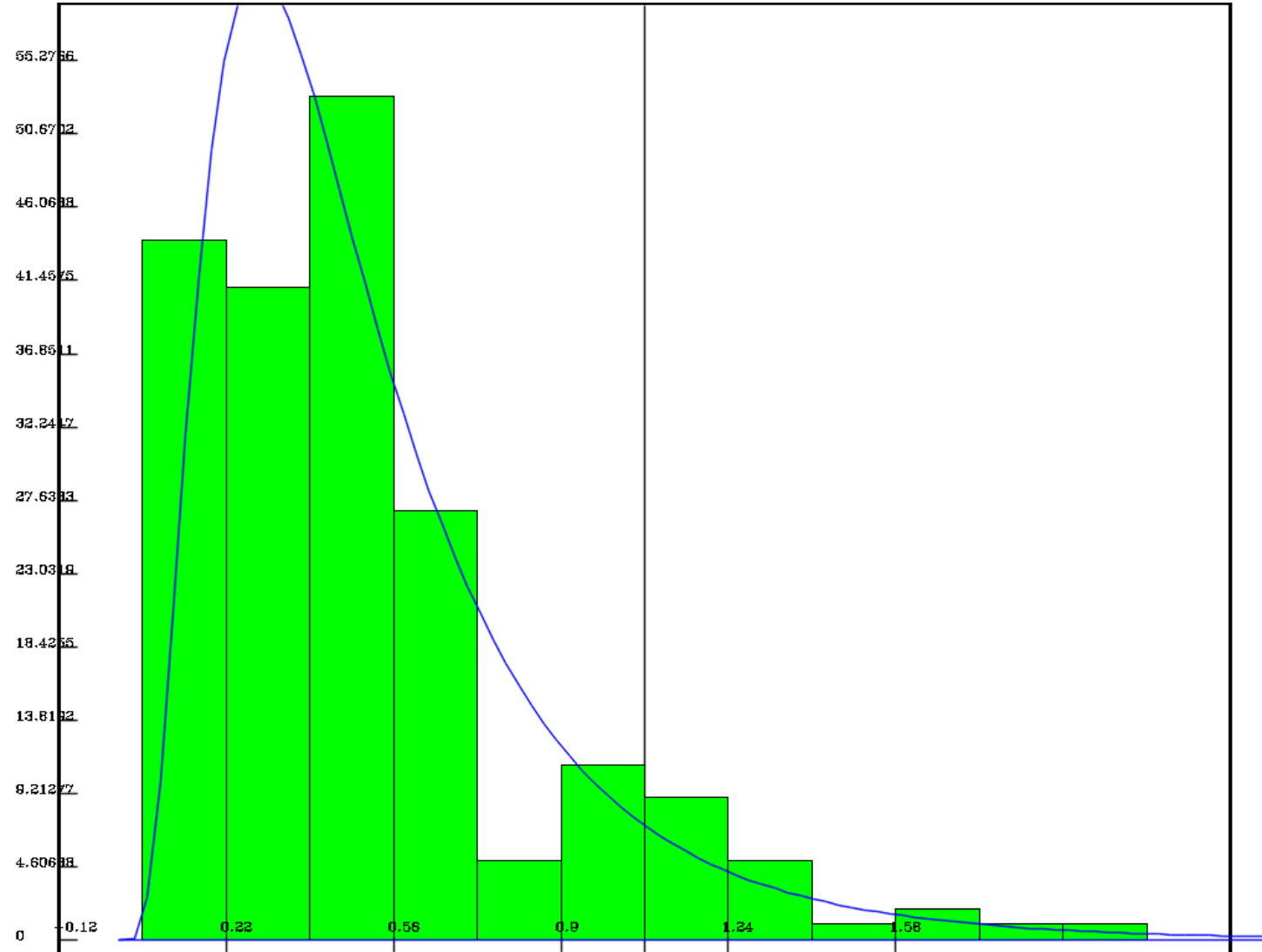
Wahrscheinlichkeitsnetz Johnson-Transformation



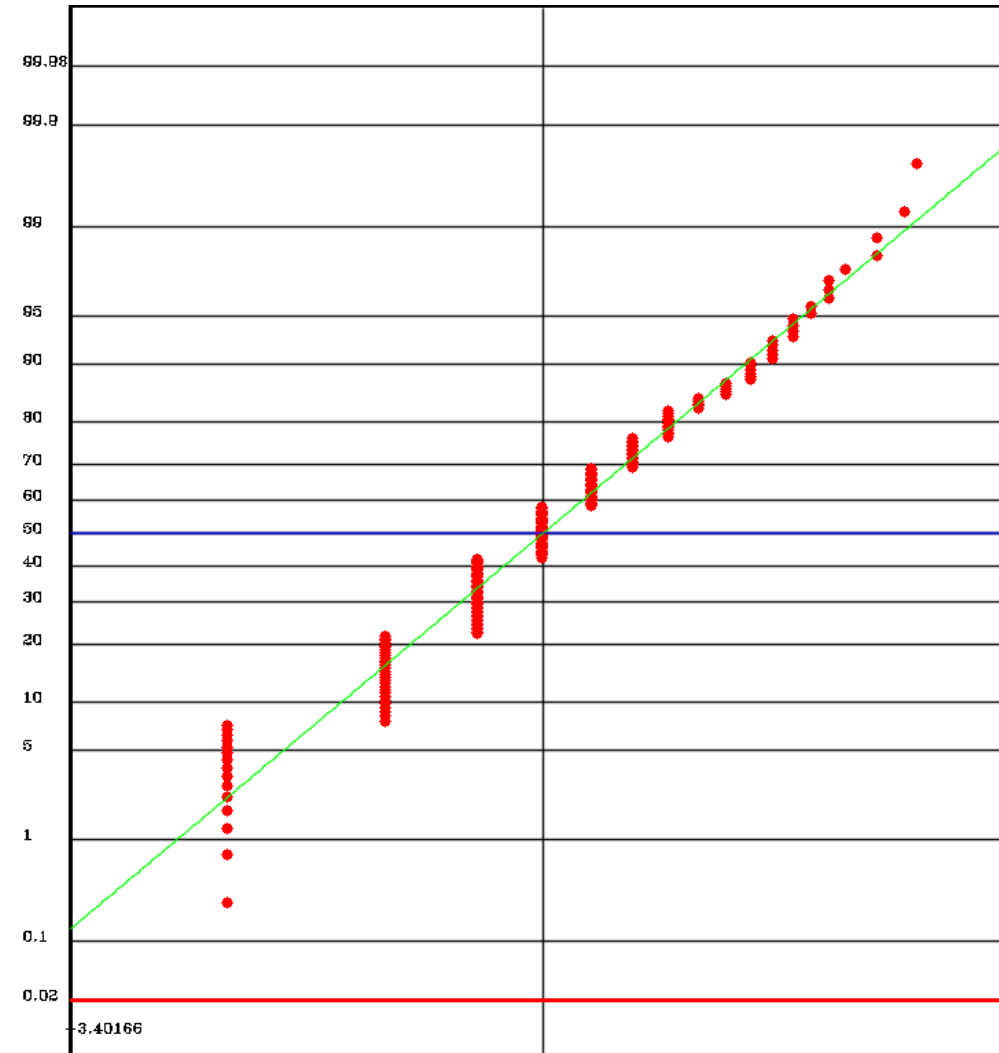
Wahrscheinlichkeitsnetz Normalverteilung



Johnsontransformation rechtsschief



Wahrscheinlichkeitsnetz Johnson-Transformation



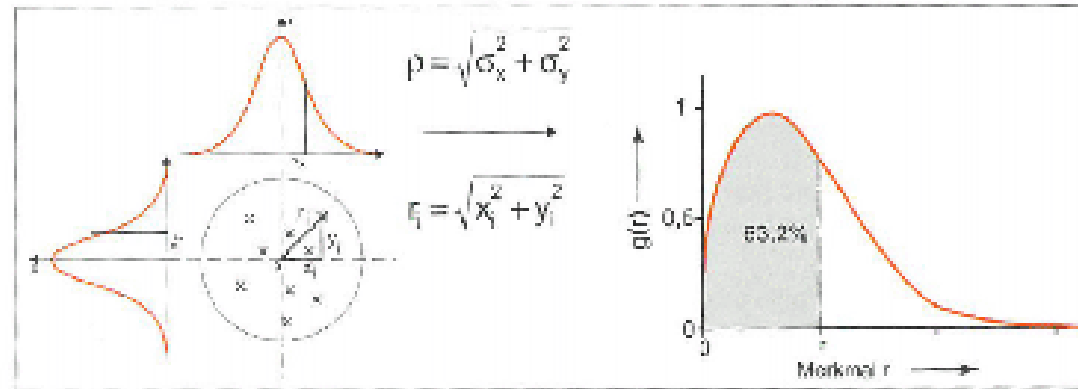
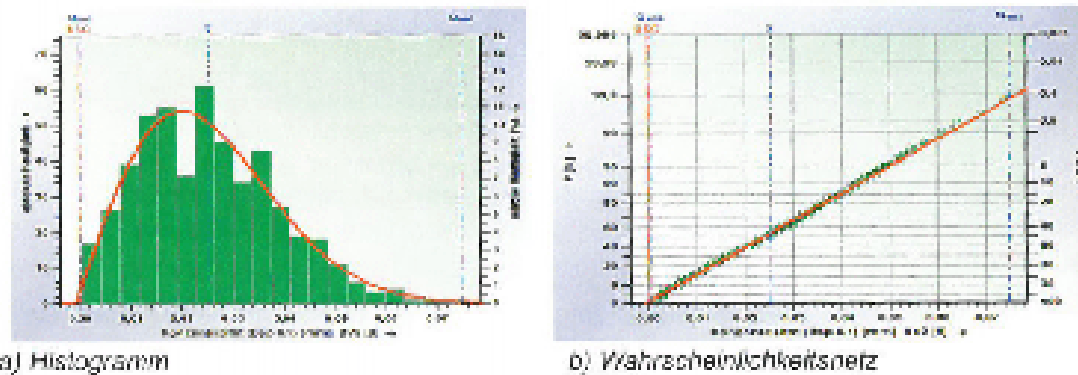


Abbildung 5.4-8: Entstehung der Rayleigh-Verteilung
 σ_x, σ_y = Standardabweichung der Einzelkomponenten

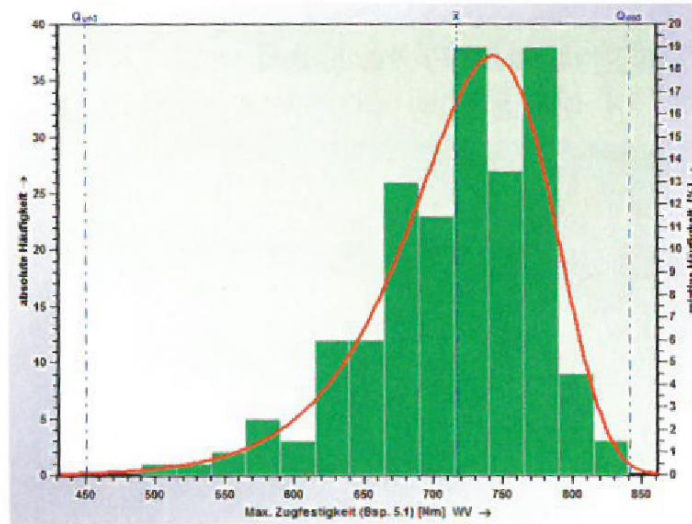


a) Histogramm

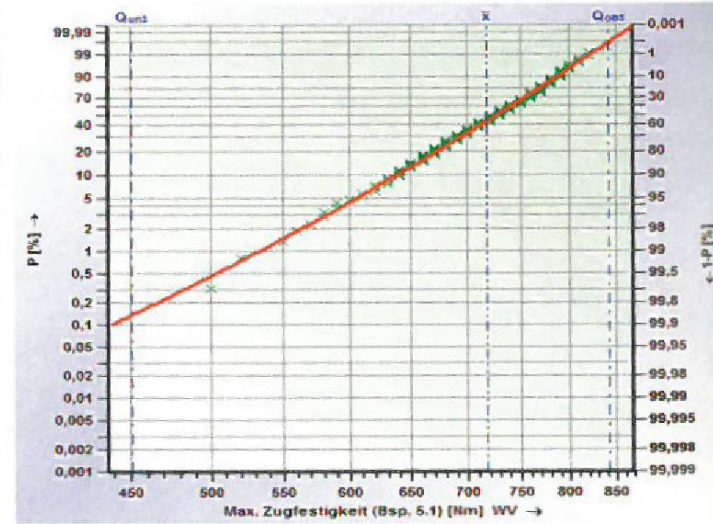
b) Wahrscheinlichkeitsnetz

Abbildung 5.4-9: Rayleigh-Verteilung
 $Q_{0.01}$ = Unterer Prozentpunkt $Q_{0.99}$ = Oberer Prozentpunkt

$$g_{x,y} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



a) Histogramm



b) Wahrscheinlichkeitsnetz

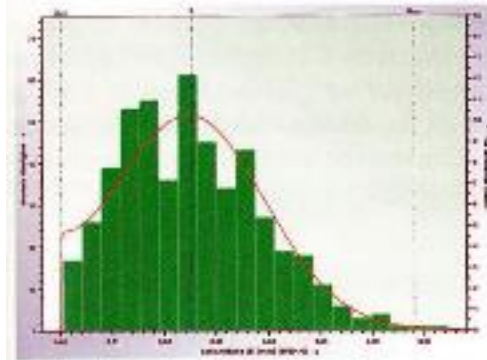
Abbildung 5.4-11: Weibullverteilung

Q_{un3} = Unterer Prozentpunkt Q_{ob3} = Oberer Prozentpunkt

Wahrscheinlichkeitsfunktion:
$$g(x) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{x-a}{\alpha} \right)^{\beta-1} \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{x-a}{\alpha} \right)^{\beta} \right\}$$

Verteilungsfunktion:
$$G(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x-a}{\alpha} \right)^{\beta} \right\}$$

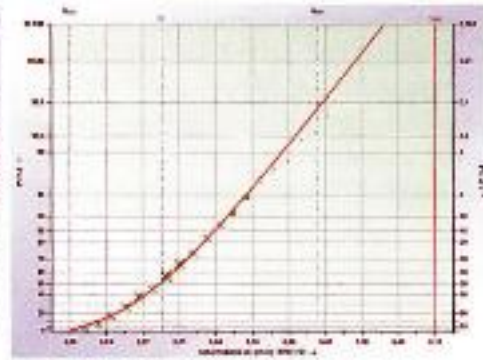
Betragsverteilung 1.Art/Faltung



a) Histogramm

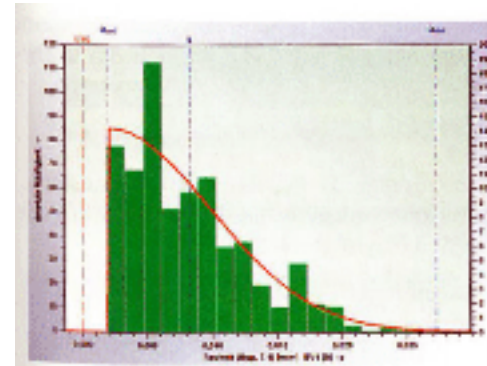
Abbildung 5.4-6: Gefaltete Normalverteilung

$Q_{0,5}$ = Unterer Prozentpunkt



b) Wahrscheinlichkeitsnetz

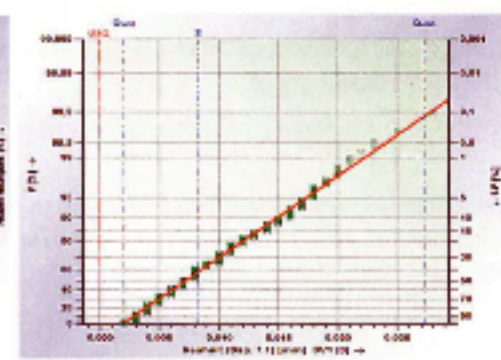
$Q_{0,5}$ = Oberer Prozentpunkt



a) Histogramm

Abbildung 5.4-7: Betragsverteilung 1. Art bei Faltung am Mittelwert, a = Verschiebefaktor

$Q_{0,5}$ = Unterer Prozentpunkt



b) Wahrscheinlichkeitsnetz

$Q_{0,5}$ = Oberer Prozentpunkt

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{|x-a|}{\sigma} \right)^2 \right\} ; \quad 0 \leq |x-a| < \infty$$

Verteilungsfunktion:

$$G(x) = \int_0^{|x-a|} g(t) dt \quad a = \text{Abweichung vom Nullpunkt}$$

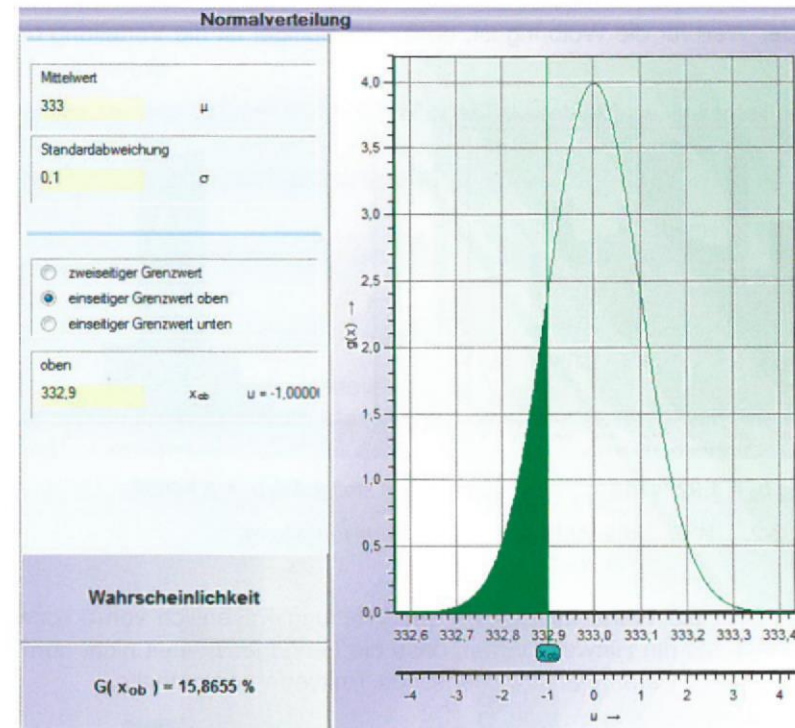


Abbildung 3.2-3: Mit der unteren Spezifikationsgrenze $USG = 332,9$ ml erhält man den Unterschreitungsanteil $p = 15,866$ für eine normalverteilte Füllmengengrundgesamtheit mit den Parametern $\mu = 333,0$ ml und $\sigma = 0,1$ ml

- [1] Gerhard Linß (Hrsg.): *Qualitätsmanagement für Ingenieure* Carl Hanser Verlag München 3. aktualisierte und erweiterte Auflage (2011) ISBN 978-3-446-41784-7
- [2] Edgar Dietrich, Alfred Schulze (Hrsg.): *Statistische Verfahren zur Maschinen- und Prozessqualifikation* Carl Hanser Verlag München 5. aktualisierte Auflage (2005) ISBN 3-446-22894-2
- [3] Holger Brüggemann, Peik Bremer (Hrsg.): *Grundlagen Qualitätsmanagement* Springer Vieweg Verlag (2012) ISBN 978-3-8348-1309-1
- [4] Tilo Pfeifer, Robert Schmitt (Herausgeber): [Masing Handbuch Qualitätsmanagement](#), Carl Hanser Fachbuchverlag München Wien, 6. überarbeitete Auflage (2014)
- [5] Edgar Dietrich, Alfred Schulze (Hrsg.): *Eignungsnachweis von Prüfprozessen* Carl Hanser Verlag München 2. aktualisierte und erweiterte Auflage (2004) ISBN 3-446-22893-4
- [6] Hans-Joachim Mittag (Hrsg.): *Qualitäts Regelkarten* Carl Hanser Verlag München Wien (1993) ISBN 3-446-17661-6
- [7] Edgar Dietrich, Alfred Schulze (Hrsg.): *Richtlinien zur Beurteilung von Meßsystemen und Prozessen, Abnahme von Fertigungseinrichtungen mit Originalrichtlinien von Ford, General Motors und Daimler-Benz* Carl Hanser Verlag München Wien (1998) ISBN 3-446-19572-6

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit !

